Université Paris Dauphine
DE MI2E
Algèbre linéaire 3

TD 1. Révisions sur les espaces vectoriels, normes, produits scalaires, espace euclidien, projections

1 Espaces vectoriels

Exercice 1. Soient dans $\mathbf{R}^3$ les sous-ensembles suivants :

$$E_1 = \{(x,y,z) : -x+2y+z \geq 0\},$$
$$E_2 = \{(x,y,z) : xy - yz = 0\},$$
$$E_3 = \{(x,y,z) : 2x - y = 1\},$$
$$E_4 = \{(x,y,z) : x^2 - y + z = 0\},$$
$$E_5 = \{(x,y,z) : -x + 2y^2 + 4z = 0\},$$
$$E_6 = \{0\} \times \mathbf{R} \times \{0\},$$
$$E_7 = \{(x,y,z) : x - y = 0\}.$$

Sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$? Pour chacun de ces ensembles qui est un sous-espace vectoriel, en donner une base et sa dimension, dire s'il s'agit de $\mathbf{R}^3$ tout entier, sinon en donner un supplémentaire.

Exercice 2. Soient les familles de vecteurs :

1. $\{(9,2),\ (8,-3),\ (\frac{3}{2},\frac{7}{3})\}$;

2. $\{(6,0,-5),\ (-1,2,1),\ (0,1,-1)\}$;

3. $\{(5,-4,7,8),\ (-\frac{5}{2},3,1,-2)\}$;

4. $\{(-1,2,1,4),\ (0,3,-1,2),\ (-2,1,3,6)\}$.

Ces familles de vecteurs sont elles libres, liées ? (Utiliser deux méthodes différentes pour répondre.) Donner à chaque fois la dimension des sous-espaces engendrés par ces familles.

Exercice 3. (Espaces des matrices)

1) Montrez que $M_2(\mathbf{R})$ est un $\mathbf{R}-$espace vectoriel. Donnez-en une base.
2) Montrez que $M_2(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices à coefficients complexes est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel. Donnez-en une base.

Exercice 4. Montrer que la famille $(\sin(x), \sin(2x), \sin(3x))$ est une sous-famille libre de $C^0(\mathbf{R};\mathbf{R})$. Est-elle génératrice ?

Exercice 5. De ces parties de $C^0(\mathbf{R};\mathbf{R})$, lesquelles sont des sous-espaces vectoriels ?

- les fonctions positives,

- les fonctions périodiques,
- les fonctions 2π périodiques,
- les fonctions dérivables,
- les fonctions qui sont dérivables en au moins un point de $\mathbf{R}$.

Exercice 6. Soit $E = C^1(\mathbf{R};\mathbf{R})$, $F = C^0(\mathbf{R};\mathbf{R})$. Lesquelles de ces applications $E \to F$ sont linéaires ?
- la dérivation
- $f \mapsto f(x-2)$,
- $f \mapsto f(x) - 2$, - soit g fixée, $f \mapsto fg$, $f \mapsto f \circ g$ (composée), $f \mapsto g \circ f$.

Exercice 7. 1) Montrer que $(1, X, X^2)$ et $(1, X-1, X^2)$ sont des bases de l'espace vectoriel $\mathbf{R}_2[X]$.

2) Ecrire la matrice de passage de $(1, X, X^2)$ vers $(1, X-1, X^2)$.

3) Déterminer la matrice de l'application $P \mapsto P'$ dans ces deux bases.

2 Normes

Exercice 8. On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}_2[X]$. Montrer que les applications suivantes sont des normes sur E :

$$\|aX^2+bX+c\|_1 = \max(|a+b|, |b|, |c|), \ \|P\|_2 = \int_0^1 |P(x)|\, dx \ \text{ et } \ \|P\|_3 = |P(0)|+|P(1)|+|P(2)|.$$

Les applications suivantes sont-elles des normes :

$$\|aX^2+bX+c\|_4 = \max(|a+b|, b^2+c^2) \ \text{ et } \ \|P\|_5 = |P(0)| + |P(2)| + |P'(1)| \ ?$$

Exercice 9. 1) Montrer que les applications suivantes définies sur $\mathbf{R}^n$:

$$\begin{aligned} \|(x_1, \ldots, x_n)\|_1 &:= |x_1| + \cdots + |x_n|, \\ \|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 &:= \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}, \\ \|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty &:= \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}. \end{aligned}$$

sont des normes [1]. Montrer que l'application $x \mapsto \|x\|_1 + \|x\|_2$ définit encore une norme. L'application $x \mapsto \|x\|_2 - \|x\|_1$ définit-elle encore une norme ? Et l'application $x \mapsto \|x\|_1 - \|x\|_2$?

2) Montrer que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes (à la main !)

Exercice 10. Sur l'espace $C^0([0,1];\mathbf{R})$ des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles on définit les applications suivantes :

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &:= \int_0^1 |f(x)|\, dx, \\ \|f\|_\infty &:= \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|. \end{aligned}$$

Montrer qu'il s'agit de normes.

Construire une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $C^0([0,1];\mathbf{R})$ telles que $\|f_n\|_1 \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ et $\|f_n\|_\infty = 1$ pour tout n. Montrer que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

1. On admettra l'inégalité triangulaire pour la norme $\|\cdot\|_2$, qui sera montrée plus tard en cours.

3 Produit scalaire, espace euclidien

Exercice 11. Dire si les formes suivantes sont linéaires en la première variable, en la deuxième, si elles sont symétriques, positives, non dégénérées et /ou si elles sont des produits scalaires. Dans ce dernier cas, écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz associée.

a) f_1 définie sur $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ par :

$$f_1((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_1 - 3x_2y_2 - x_3y_3.$$

b) f_2 définie sur $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ par :

$$f_2((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1^2 + y_3^2 + 3x_1y_2 + 5x_2y_3.$$

c) f_3 définie sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ ($n \in \mathbb{N} - \{0\}$) par :

$$f_3((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

d) on note $\mathbf{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré 2, on définie f_4 sur $\mathbf{R}_2[X] \times \mathbf{R}_2[X]$ par :

$$f_4(P, Q) = (a_0 + a_1)b_0 + (a_0 + 3a_1)b_1 + 3a_2b_2$$

si $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$.

Exercice 12. Soient a et b deux nombres réels et $\beta : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par :

$$\beta((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + ax_2y_2.$$

Donnez, lorsqu'il y en a, les valeurs de a et b pour lesquelles β est

a) linéaire en la première variable,

b) linéaire en la deuxième,

c) symétriques,

d) positives,

e) non dégénérée,

f) un produit scalaire.

Exercice 13. Munissons $\mathbf{R}^4$ du produit scalaire usuel. Soient les vecteurs

$$u_1 = (0, 0, 0, 1),\ u_2 = (1, 0, 1, 0),\ u_3 = (1, -3, 0, 2),\ u_4 = (3, -3, -2, 1).$$

a) Montrez que $B = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de $\mathbf{R}^4$.

b) Orthogonalisez B selon le procédé de Gram-Schmidt.

Exercice 14. Dire si les formes suivantes sont linéaires en la première variable, en la deuxième, si elles sont symétriques hermitiennes, positives, non dégénérée, si elles sont des produits scalaire. Dans ce dernier cas, écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz associée.

a) f_1 définie sur $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$ par :

$$f_1((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1\bar{y}_1 - 2ix_2\bar{y}_2 + (1 + i)\overline{x}_2y_1 + x_3\overline{y}_2,$$

b) f_2 définie sur $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$ par :

$$f_1((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1\bar{y}_1 - 2x_2\bar{y}_2 + \overline{y}_3x_3,$$

c) f_3 définie sur l'ensemble des matrices à coefficients complexes $n \times n$ (noté $M_n(\mathbb{C})$) par :

$$f_2(A, B) = \mathrm{Tr}({}^t A\overline{B}).$$

d) f_4 définie sur $E = \{f : [0, 1] \to \mathbb{C}\}$ par :

$$f_4(f, g) = \int_0^1 \overline{f(x)} g(x)\ dx.$$

Exercice 15. Montrez que pour tout réels $a_1, a_2, ..., a_n$ et $b_1, b_2, ..., b_n$ on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

En déduire que

$$\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1} a_i^2\right).$$

Exercice 16. (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit E un espace euclidien sur $\mathbf{R}$ muni d'un produit scalaire noté $\langle , \rangle$ et $u, v \in E$.

1. Montrez que si u et v sont colinéaires, on a :

$$|\langle u, v\rangle| = ||u|| \times ||v||.$$

2. Supposons que u et v ne sont pas colinéaire. En utilisant le fait que $v + tu$ est non nul pour tout t, montrez que :

$$\langle u, v\rangle \leq ||u|| \times ||v||.$$

Exercice 17. Soit E l'espace des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$. On définit pour tout f et pour tout g dans E :

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\ dt.$$

1. Montrez que $\langle , \rangle$ est un produit scalaire sur E.

2. En déduire que

$$|\langle f, g\rangle| \leq \left(\int_a^b f^2(t)\ dt\right)^{1/2}\left(\int_a^b g^2(t)\ dt\right)^{1/2}.$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que l'inégalité précédente soit une égalité.

Exercice 18. Effectuer le procédé de Gram-Schmidt sur les vecteurs de $\mathbf{R}^3$ suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4 Projections

Exercice 19. $\mathbb{R}^3$ est muni de la structure euclidienne canonique. Soit D la droite de vecteur directeur $u = (1, 2, 0)$. Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale sur D.

Exercice 20. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F = \Big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad \text{et} \quad x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0\Big\}$$

1) Quelles sont les dimensions de F et $F^{\perp}$? Donner un système d'équations cartésiennes de $F^{\perp}$.
2) Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

Exercice 21. Soit E l'ensemble des fonctions continues sur$[0, \pi]$ à valeurs réelles, muni du produit scalaire défini par :

$$\langle f, g\rangle := \int_0^{\pi} f(t)g(t)dt, \quad \forall (f, g) \in E^2.$$

Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto \cos t$.

1) Trouver une base orthonormée de F.
2) On pose
$$I(a, b) = \int_0^{\pi} (a \sin t + b \cos t - c)^2 dt.$$
Déterminer les réels a_0 et b_0 réalisant
$$I(a_0, b_0) = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} I(a, b)$$
et calculer $I(a_0, b_0)$.

Exercice 22. Soit $E = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ à coefficients réels. E est muni du produit scalaire canonique :

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{i,j}$$

1) Montrer que $\langle A, B\rangle = \mathrm{Trace}\,({}^t AB)$.
2) a) Soit D_0 le sous-espace vectoriel des matrices scalaires
$$D_0 = \{\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$
Déterminer $D_0^{\perp}$ et les projections orthogonales sur D_0 et $D_0^{\perp}$.
b) Mêmes questions pour le sous-espace D_1 des matrices diagonales.